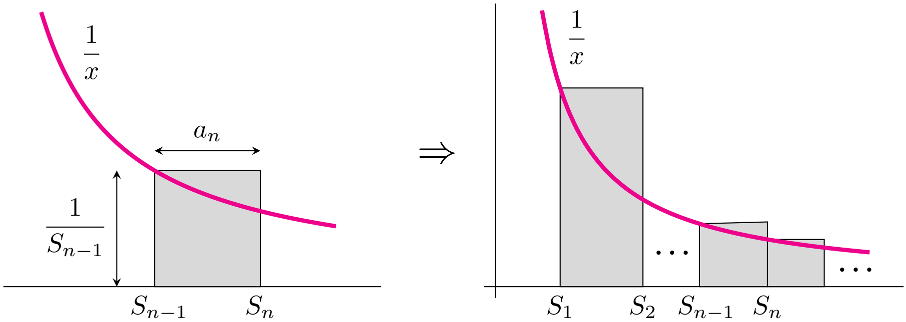
Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 23 (2020), Núm. 2, Pág. 242

No existe una serie divergente que sea la menor

La serie armónica es un ejemplo de serie divergente cuyo término general tiende a cero. Su divergencia se puede demostrar de muchas formas, en particular usando el criterio de la integral. El siguiente resultado, que se remonta hasta Abel (ver [1] y las referencias que contiene), se puede probar gráficamente con una idea similar:

Teorema. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos divergente y, para cada n, sea $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Las sumas parciales de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_{n-1}}$ crecen más lentamente que las de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ya que $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$), pero esta nueva serie también es divergente.*

Demostración. Basta observar lo que sigue:



$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \geq \int_{S_1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty. \qquad \square$$

Un resultado del mismo tipo para series convergentes —no existe una serie convergente que sea la mayor— se puede ver en [2].

Referencias

[1] J. M. Ash, Neither a worst convergent series nor a best divergent series exists, *The College Math. J.* **28** (1997), núm. 4, 296–297.

[2] J. M. Ash y Á. Plaza, No existe una serie convergente que sea la mayor, *La Gaceta de la RSME* **23** (2020), núm. 2, 262.

J. Marshall Ash, Department of Mathematics, De Paul University, Chicago
Correo electrónico: `mash@depaul.edu`
Página web: `https://condor.depaul.edu/~mash/`

Ángel Plaza, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Correo electrónico: `angel.plaza@ulpgc.es`
Página web: `http://www.personales.ulpgc.es/angelplaza.dma/`